**Aplicaciones lineales**

**Definición**

* Sea V un K-espacio, y sea W otro K-espacio. **f: V → W es una aplicación lineal** si:
  + f(v+v’) = f(v) + f(v’)
  + f(k⋅v) = k⋅f(v)
  + Para cualesquiera vectores v,v’€V y para cualquier k€K.
* Se cumple que:
  + f(0v) = 0w (siendo 0 un vector)
  + f(-v) = -f(v)
  + f(k1v1 + … + kn⋅vn) = k1⋅f(v1) + … + kn⋅f(vn)
  + Si {v1, …, vn} es un subconjunto de V linealmente dependiente, entonces el subconjunto de W {f(v1), …, f(vn)} es también linealmente dependiente.

**Ejemplos**

* f: V→K, con f(v) =0
* La aplicación identidad idV: V → V, con idV(v) = v
* La aplicación f: R2→ R, con f(x,y) = x+y
* La aplicación f: R2→ R3, con f(x,y) = (x+y, x-y, y)
  + En cambio, si fuese f(x,y) = (x+y, x-y, 1), no sería una ap. lineal

**Composición**

* Sean f:V→W y g: W→U ap. lineales. La composición gºf: V→U es también lineal. Demostración:
  + (gºf)(v+v’) = g[f(v+v’)] = g[f(v) + f(v’)] = g[f(v)] + g[f(v’)] = (gºf)(v) + (gºf)(v’)
  + (gºf)(kv) = g[k⋅f(v)] = k⋅g[f(v)] = k⋅(gºf)

**Isomorfismo lineal**

* Se dice que f es un **isomorfismo lineal** cuando es una aplicación biyectiva[[1]](#footnote-0) y por lo tanto tiene inversa.
* Si f: V→W es un isomorfismo lineal, entonces f-1:W→V también lo es.
  + Se sabe que f tiene inversa por ser biyectiva. Es necesario demostrar que f-1 también es lineal.
  + Al ser la inversa, se cumple que f-1 (f(w)) = w. A partir de esto,
    - f[f-1(kw)] = kw = k⋅f[f-1(w)] = f[k⋅f-1(w)]
    - f[f-1(w+w’)] = w+w’ = f[f-1(w)] + f[f-1(w’)] = f[f-1(w) + f-1(w’)]
* No confundir con **endomorfismo:** un endomorfismo es una aplicación del tipo f:V→V.
  + Un endomorfismo que es además biyectivo se denomina automorfismo.

**Núcleo e imagen**

* Dada una aplicación lineal f: V→W.
* El **núcleo** de la aplicación (**Ker(f)**) es el conjunto {x€V | f(x) = 0}
  + Es un subespacio de V.
  + Son aquellos elementos de V cuya imagen es el 0., f es inyectiva si y sólo si Ker(f) = 0.
    - Supongamos que f es inyectiva. Entonces, cualquier vector u del núcleo que cumpla f(u)=0=f(0). Por la inyectividad, u=0.
* La **imagen** de la aplicación (**Im(f)**) es el conjunto {f(x) | x€V}
  + Es un subespacio de W.
  + Son aquellos elementos de W que se forman como una imagen de un elemen to de V. Entonces, f es sobreyectiva si y solo si Im(f) = W.
  + Dada una ap. lin. f:V→V’, si {u1, …, un} es un sistema de generadores de V, entonces {f(u1), …, f(un)} será un sistema de generadores de Im(f)
* **Ejemplo:** Calcular núcleo e imagen de f(x,y,z) = (x+y, x-z, x-z)
  + Ker f = { (x,y,z) € R^3 | x+y=0, x-z=0} = {(x,y,z) € R^3 | x=-y=z} = <(1,-1,1)>
  + Im f = {f(x), f(y), f(z)} = <{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)}> = <{(1,1,1), (1,0,0), (0,-1,-1)}> = <{(1,0,0), (0,-1,-1)}>

**Aplicaciones sobre subespacios**

* Sea f: V→W una ap.lin. Si U es un subespacio de V, f(U) es un subespacio de W. Además, siendo U = <u1, …, us>, f(U) = < f(u1), …, f(us) >
  + En particular, esto demuestra que Im f es un subespacio de W.
  + Demostración: Se cumple que f(U) =/= ∅, pues f(0) = 0 € f(U). Además, f(u)+f(u’) = f(u+u’) € f(U), y k⋅f(u) = f(k⋅u) € f(U).
* Si L es un conjunto de vectores, generalmente **f-1(L)** no es la función inversa, sino que es la **imagen inversa** de f en V. Está compuesta por los elementos de V cuya imagen pertenece a L.
  + Si L es el conjunto <(1,2,3)> y f: V→W la aplicación f(x,y,z) = (x+y,x+z,y+z), entonces f-1(L) serán las soluciones al sistema x+y=1, x+z=2, y+z=3
* Sea f: V→W una ap.lin. Si L es un subespacio de W, entonces f-1(L) es un subespacio de V.
  + En particular, f-1({0}) es un subespacio de V denominado **Núcleo** de f (ver arriba).
  + Demostración: f(0) = 0 € L, entonces 0 € f-1(L). Además, para w,w’ € f-1(L), se cumple que f(w+w’)= f(w)+f(w’) € L y f(k⋅w) = k⋅f(w) € L.

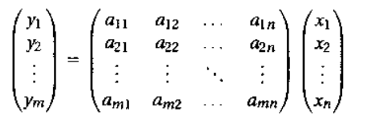
**Teoremas de aplicaciones inyectivas y sobreyectivas**

* Sean V y W espacios vectoriales, B = {v1, …, vn} una base de V y w1, …, wn€W. Existe una única aplicación lineal f: V→W tal que f(vi) = wi para todo i = 1 … n.
  + Demostración: las coordenadas (ki) de cada vector v respecto la base B son únicas. Entonces, si v = definimos f(v) = . Etonces, f es lineal y f(vi) = wi para todo i.
* Sea f: V→W una ap.lin. entre espacios vectoriales finitos.
  + f es **inyectiva** ⇔ para cada conjunto linealmente independiente {u1, …, ur} el conjunto {f(u1), …, f(ur)} es linealmente independiente.
    - a1f(u1) + … + arf(ur) = 0.
    - f(a1u1 + … + arur) = 0. Entonces, (a1u1 + … + arur) € Ker(f). Como es inyectiva, (a1u1 + … + arur) = 0.
    - Sabemos que esta suma de vectores sólo puede dar 0 para el caso trivial donde todos los escalares sean 0, pues los vectores son lin. indep. Entonces, {f(u1), …, f(ur)} es también lin. indep.
  + f es **sobreyectiva** ⇔ para cada sistema de generadores de V {u1, …, us} el conjunto {f(u1), …, f(us)} es sistema de generadores de V’. (siendo f:V→V’)
    - Si {u1, …, us} es conjunto de generadores de V, {f(u1), …, f(us)} será conjunto de generadores de Im(V). Entonces, si es sobreyectiva, Im(V)=V’, por lo que será conjunt de generadores también de V’
* Por los dos apartados anteriores, f es **biyectiva** si la imagen de una base de V es una base de W.
* **Corolarios** de estos teoremas:
  + V y W son isomorfos[[2]](#footnote-1) si y solo si dim(V) = dim(W).
    - Si f:V→W es un isomorfismo, es una aplicación biyectiva. Por lo tanto, siendo {v1, …, vn} una base de V con n elementos, {f(v1), …, f(vn)} con también n elementos será una base de W. dim(V) = dim(W) = n.
    - Recíprocamente, si dim(V) = dim(W) = n, sabemos que BV y Bw tienen los mismos elementos, por lo que existe la aplicación isomórfica tal que f(vi) = wi
  + Todo espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a Kn.

**Teorema de la dimensión**

* Sea f: V→W una ap.lin. y dim(V) = n.
* **dim(Ker f) + dim(Im f) = dim(V)**. Demostración:
  + Ker f es un subespacio vectorial de V, luego dim(Ker f) = r <= n.
  + Si {v1, …, vr} es una base de Ker f, es también un subconjunto de V lin. indep. Entonces, se le pueden añadir vr+1,...,vn € V vectores tales que el resultado {v1, …, vr, vr+1, …, vn} es una base de V (y por lo tanto lin. indep).⋅
  + Im f = <f(v1), …, f(vn)>. Teniendo en cuenta la definición de núcleo, conocemos que f(vi) = 0 para i = 1…r. Entonces, Im f = <f(vr+1), …, f(vn)>
  + Entonces, sólo es necesario comprobar que Im f es linealmente independiente.
    - ar+1f(vr+1)+...+anf(vn) = 0 ⇔ f(ar+1vr+1 + … + anvn) = 0
    - f(ar+1vr+1 + … + anvn) = 0 ⇔ ar+1vr+1 +...+anvn € Ker f
    - ar+1vr+1 +...+anvn € Ker f ⇔ existen escalares a1…an tales que ar+1vr+1 +...+anvn = a1v1+...+arvr.
  + Sin embargo, {v1, …, vr, vr+1, vn} es lin. indep⋅. Esto muestra que la previa condición sólo se cumple si ai=0 para todo i. Entonces, Im f = {f(vr+1), …, f(vn)} es lin. indep.

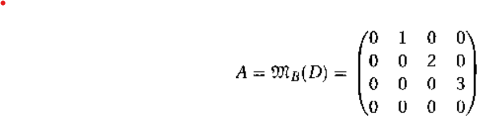
**Matriz asociada a una aplicación lineal**

* Sea f: V→V’ una aplicación lineal, y sea B={e1, e2, …, en} una base de V, y B’={e1’,e2’...en’}.
* Para calcular la **matriz asociada a f respecto de las bases B y B’**, denotado por **A = MB,**B’**(f)** o también por **(f)B,B’**:
  + Su nùmero de columnas es la dimensión del primer espacio, y su número de filas es la dimensión del segundo espacio.
  + Se realiza la imagen de los vectores de **B**: f(ei)
  + Se calculan sus coordenadas respecto de **B’**
  + Se disponen en vertical, cada vector de B siendo una columna.
* Siendo B y B’ bases de dos subespacios V y W, y f:V→W es una ap.lin. tal que A=(f)B,B’ € Mmxn(K), entonces **r(A)=dim(Im f)**
  + Demostración: Sean B={v1,...vn} y B’={w1,...,wm}, y (a1j,...,amj) las coordenadas de f(vj) en la base B’.
  + Estas coordenadas forman la fila j-ésima de la matriz At. Entonces, **r(A)** = rc(A) = dim(<f(v1), …, f(vn)>) = **dim(Im f)**.

**Corolarios del teorema de la dimensión**

* Sea f:V→V’, dim(V)=n, dim(V’)=m, y sea A la matriz asociada a f respecto de cualquier dos bases.
* f es inyectiva ⇔ rg(A)=n
  + f es inyectiva ⇔ ker(f)=0 ⇔ dim(Im(f))=dim(V) ⇔ rg(A)=n
* f es sobreyectiva ⇔ rg(A) = m
  + f es sobreyectiva ⇔ Im(f)=V’, es decir, dim(Im(f)) = dim(V’), entonces rg(A)=m
* Sea A la matriz de orden mxn asociada a f respecto de las bases B y B’. f es un isomorfismo ⇔ A es cuadrada y regular
  + f es un isomorfismo ⇔ es inyectiva y sobreyectiva, por lo que se cumplen las dos previas. Entonces m=n.
* A partir de estos teoremas, si f es un **endomorfismo** (m=n), es imposible que f sea inyectivo o sobreyectivo sin ser ambos, es decir, sin ser biyectivo.

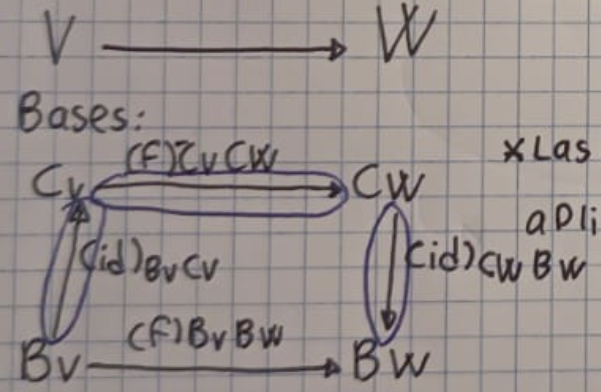
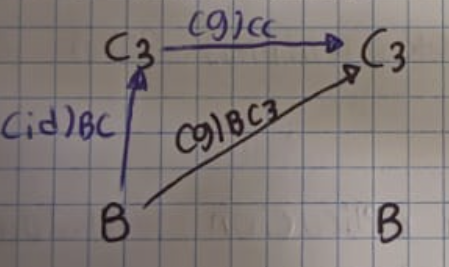
**Ejemplo de cálculo de matriz asociada**

* Sea D: P3(R) → P3(R) la aplicación lineal ‘derivada’, que lleva cada polinomio de grado menor o igual que 3 en su derivada. Consideremos la base estándar de P3(R): **B={1,x,x^2,x^3}** y calculemos la matriz asociada a D respecto de la base B.
  + Calculamos las imágenes por D de los vectores de B y sus coordenadas respecto de B.
  + D(1) = 0 = (0,0,0,0)B
  + D(x) = 1 = (1,0,0,0)B
  + D(x^2) = 2x = (0,2,0,0)B
  + D(x^3) = 3x^2 = (0,0,3,0)B

**Matriz de cambio de base**

* Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B y B’ bases de V.
* Se llama **matriz de cambio de base de B a B’** a la matriz asociada a la aplicación identidad[[3]](#footnote-2) de V coinsdiderando en el dominio la base B y en el codominio la base B’, es decir, la matriz **(idV)B,B’**.
* **Características:**
  + **(idV)BB’** = (**(idV)B’B**)**-1**
  + Toda matriz no singular es una matriz cambio de base.

**Matriz de cambio de base**

* Es posible hallar algunas de las matrices relacionadas con aplicaciones linetales realizando el **producto vectorial** de otras ya calculadas, a partir del esquema.
* Las matrices se multiplican en el orden opuesto de las flechas.
* Ejemplos:
  + (f)BvCw = (f)CvCw \* (id)BvCv
  + (f)BvBw = (id)CwBw ⋅ (f)CvCw ⋅ (id)BvCv
* En un endomorfismo:
  + (g)BC = (g)CC⋅(id)BC = (id)BC⋅(g)BB
  + (g)BB = (id)CB ⋅ (g)CC ⋅ (id)BC = [(id)BC]-1⋅ (g)CC ⋅ (id)BC

**Matrices semejantes y equivalentes**

* Dos matrices A y C se dicen **equivalentes** si existen matrices Q y P elementales tales que **Q**  **A** ⋅ **P = C**
* A y C se dicen **semejantes** si existe matriz invertible P tal que **P-1**⋅ **A** ⋅ **P = C**
* **Teorema:** dos matrices son equivalentes si y solo si son matrices asociadas a la misma aplicación en distintas bases.
  + Demostración: Sea Q=(id)CwBw, A=(f)CvCw C=(f)BvBw. Por la regla anterior, existe P invertible que será (id)BvCv, y cumplirá **Q**  **A** ⋅ **P = C**
  + **Corolario:** Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango, por estar asociadas a la misma ap. lineal.
* **Teorema:** dos matrices son semejantes si y solo si son matrices asociadas al mismo endomorfismo en distintas bases.
  + Demostración: ver teorema previo. Si Q=P-1, (id)CwBw = [(id)BvCv]-1 → W=V.
* **Nota:** Todas las matrices semejantes son equivalentes, al revés no.

1. Biyectiva: Sobreyectiva y inyectiva. Todo elemento de W es resultado de una aplicación de V. y cada imagen de W es única para un elemento de V- [↑](#footnote-ref-0)
2. Existe una ap. lineal biyectiva entre ambos. [↑](#footnote-ref-1)
3. La aplicación identidad es aquella que no cambia los valores de los vectores. id(v)=v. [↑](#footnote-ref-2)